*Тема 5.* **НЕПЕРЕРВні випадкові величини**

1. Неперервні випадкові величини. Функція розподілу ймовірностей (інтегральна функція) та її властивості

Величина називається *випадковою*, якщо внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових факторів вона набуває того чи іншого можливого числового значення з певною ймовірністю.

Якщо множина можливих значень випадкової величини є зчисленною то таку величину називають *дискретною*. У противному разі її називають *неперервною*.

Закон розподілу неперервних випадкових величин можна подати функцію розподілу ймовірностей випадкової величини *F*(*х*), так звану інтегральну функцію.

Функцію аргументу *х*, що визначає ймовірність випадкової події *Х* < *x*, називають *функцією розподілу ймовірностей*:

*F*(*x*) = *P*(*X* *< x*) (1)

Цю функцію можна тлумачити так: унаслідок експерименту випадкова величина може набути значення, меншого за *х .*

Наприклад, *F*(5) = *P*(*X* < 5) означає, що в результаті експерименту неперервна випадкова величина *Х* може набути значення, яке міститься ліворуч від *х* = 5, що ілюструє рис. 1.



Рис. 1

Розглянемо властивості *F*(*x*):

1. 

Ця властивість випливає з означення функції розподілу.

2.  є неспадною функцією, а саме , якщо .

Із другої властивості *F*(*x*) випливають наведені далі висновки:

1. Імовірність того, що випадкова величина *Х* набуде можливого значення , дорівнює приросту інтегральної функції *F(x)* на цьому проміжку:

 (2)

2. Якщо випадкова величина *Х* є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:



Тож для неперервної випадкової величини *Х* справджуються такі рівності:

 (3)

3. Якщо , виконуються два подані далі співвідношення.

1)

Оскільки подія *Х* < – ∞ полягає в тому, що випадкова величина набуває значення, яке міститься ліворуч від – ∞. А така подія є неможливою (∅).

2) 

Подія *Х* <  полягає в тому, що випадкова величина *Х* набуває числового значення, яке міститься ліворуч від + ∞. Ця подія є вірогідною (Ώ), оскільки будь-яке число *X* = *x* <.

Із цих двох співвідношень випливає висновок: якщо можливі значення випадкової величини *Х* належать обмеженому проміжку [*а*; *b*], то



 (4)

**Приклад 1.** Закон розподілу неперервної випадкової величини *Х* задано функцією розподілу ймовірностей



Побудувати графік функції *F*(*х*) і обчислити *Р*(–1 < *X* < 2).

***Розв’язання*.** *F*(*x*) графічно зображено на рис. 2.



Рис. 2

Використовуючи (2), обчислимо



**Приклад 2.** Функція розподілу ймовірностей має такий вигляд:



Знайти значення сталих *а* і *b* і накреслити графік *F*(*x*). Обчислити *P*(1 < X < 4).

***Розв’язання*.** Згідно з властивостями *F*(*x*) (4) маємо:



Коли  функція розподілу ймовірностей набирає вигляду



Графік *F*(*x*) зображено на рис. 3.



Рис. 3

Обчислюємо ймовірність події 1 < *X* < 4:



**2. Щільність імовірностей (диференціальна функція) *f*****(*x*) і її властивості**

Для неперервних випадкових величин закон розподілу ймовірностей зручно описувати з допомогою щільності ймовірностей, яку позначають *f* (*x*)*.*

*Щільністю ймовірностей* неперервної випадкової величини *Х* називається перша похідна від інтегральної функції *F*(*x*):

 (5)

звідки 

Геометрично на графіку щільності ймовірності *f*(*x*)*dx* відповідає площа прямокутника з основою *dx* і висотою *f*(*x*) (рис. 4).



Рис. 4

**Властивості *f*(*x*)**

1. . Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від *F*(*x*) за умови, що *F*(*x*) є неспадною функцією.

2. *Умова нормування* неперервної випадкової величини *Х*:

(6)

Якщо неперервна випадкова величина *Х* визначена лише на проміжку [*a*; *b*], то умова нормування має такий вигляд:

 (7)

3. Імовірність попадання неперервної випадкової величини в інтервалі обчислюється за формулою

(8)

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

 (9)

Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать лише інтервалу [*а*; *b*], то

 (10)

**Приклад 1.** Закон розподілу неперервної випадкової величини *Х* такий:



Знайти *f*(*x*) і побудувати графіки функцій *f*(*x*), *F*(*х*). Обчислити *Р*(0 < *X* < 2).

***Розв’язання*.**

Графіки функцій *F*(*x*), *f*(*x*) зображено відповідно на рис. 5 і 6.

 

Рис. 5 Рис. 6

Імовірність події 0 < *X* < 2 обчислимо за (2):

;

далі згідно із (8) маємо



**Приклад 2.** Закон неперервної випадкової величини *Х* задано у вигляді:



Знайти *F*(*x*) і побудувати графіки функцій *f*(*x*), *F*(*x*). Обчислити



***Розв’язання*.** Згідно із (10) маємо:



Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:



Графіки функцій *f*(*x*), *F*(*x*) зображені відповідно на рис. 6 і 7.



Рис. 7 Рис. 8

Імовірність події  можна обчислити згідно з (2) або (8). Застосуємо формулу (8):



**Приклад 3.** За заданою щільністю ймовірностей маємо:



Знайти значення сталої *а* та функцію *F*(*x*). Побудувати графіки функцій *f*(*x*), *F*(*x*).

***Розв’язання*.** Значення сталої *а* визначаємо з умови нормування (7):



Тут 

Отже,



При знайденому значенні *а* щільність імовірностей



Функція розподілу ймовірностей визначається так:



Отже,



Графіки функцій *f*(*x*), *F*(*x*) зображені відповідно на рис. 9 і 10.

 

Рис. 9 Рис. 10

**2. Числові характеристики неперервних випадкових   
 величин та їх властивості**

**2.1. Математичне сподівання**

Однією з найчастіше застосовуваних на практиці характеристик є *математичне сподівання*.

Термін «математичне сподівання» випадкової величини *Х* є синонімом терміна «середнє значення» випадкової величини *X*.

Якщо простір Ω є неперервним, то математичним сподіванням неперервної випадкової величини *Х* називається величина

Якщо Ω = (– ∞; ∞), то

. (11)

Якщо Ω = [*a; b*], то

 (12)

**Приклад 4.** За заданою щільністю ймовірностей



обчислити *М* (*Х*).

***Розв’язання*.** Згідно із (11) маємо:











**Приклад 5.** За заданою функцією розподілу ймовірностей

Обчислити *М* (*Х*).

***Розв’язання*.** Для обчислення *М* (*Х*) необхідно знайти щільність імовірностей

Тоді:



Якщо випадкова величина *Х* ∈ [*а*; *b*], то *М* (*Х*) ∈ [*а*; *b*], а саме: математичне сподівання випадкової величини має обов’язково міститься всередині інтервалу [*а*; *b*], являючи собою центр розподілу цієї величини.

**2.2. Мода та медіана випадкової величини**

Модою (Мo) дискретної випадкової величини *Х* називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

Модою для неперервної випадкової величини *Х* називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності:

*f* (Mо) = max.

Медіаною (Ме) неперервної випадкової величини *Х* називають те її значення, для якого виконуються рівність імовірностей подій:





 (13)

Отже, медіану визначають із рівняння (13).

**Приклад 6.** За заданою щільністю ймовірностей



Знайти *а* і *F*(*x*)*,* Mo*.*

***Розв’язання.***

За умовою нормування маємо:



Щільність імовірностей зі знайденим *а* матиме вигляд



Графік *f*(*x*) зображено на рис. 53.



Рис. 11

Згідно з рис. 53 маємо *f* (1) = max. Отже, Мo = 1.

Визначаємо Мe:



Отже,



Для визначення Ме застосовуємо рівняння (13):



Отже, Ме— можливе значення випадкової величини *Х*, причому таке, що пряма, проведена перпендикулярно до відповідної точки на площині *Х* = Ме, поділяє площу фігури, яка обмежена функцією *f* (*x*)*,* на дві рів­ні частини.

2.3. Дисперсія та середнє   
квадратичне відхилення

Математичне сподівання не дає достатньо повної інформації про випадкову величину, оскільки одному й тому самому значенню *М* (*Х*) може відповідати безліч випадкових величин, які будуть різнитися не лише можливими значеннями, а й характером розподілу і самою природою можливих значень.

*Дисперсією* випадкової величини *Х* називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини

. (14)

Для неперервної випадкової величини *Х* дисперсія

для

. (15)

Якщо *Х* ∈ [*а*; *b*],

то . (16)

Дисперсію можна обчислити і за такою формулою:

 (17)

для неперервної випадкової величини *Х*

. (18)

Якщо *Х* ∈ [*а*; *b*], то

 (19)

Слід пам’ятати, що дисперсія не може бути від’ємною величиною .

Отже, дисперсія характеризує розсіювання випадкової величини відносно свого математичного сподівання. Якщо випадкова величина виміряна в деяких одиницях, то дисперсія вимірюватиметься в цих самих одиницях, але в квадраті.

Тому доцільно мати числову характеристику такої самої вимірності, як і випадкова величина. Такою числовою характеристикою є середнє квадратичне відхилення.

*Середнім квадратичним відхиленням* випадкової величини *Х* називають корінь квадратний із дисперсії:

. (20)

**Приклад 7.** Задано щільність імовірностей:



Обчислити *D* (*X*); σ (*X*). Знайти Мо; Ме.

***Розв’язання.***

****





Графік *f* (*x*) зображено на рис. 12.



Рис. 12

Оскільки  є максимальним значенням, то 

Знаходимо *F*(*x*) =

Отже,



# **3. Основні закони неперервних випадкових величин**

### **3.1. Нормальний закон розподілу**

Випадкова величина *Х* має нормальний закон розподілу ймо­вірностей, якщо

*f* (*х*) = , – < *x* < , (21)

де *а* = *М*(*X*), σ = σ (*X*). Отже, нормальний закон визначається звідси параметрами *а* і σ і називається загальним.

Тоді

*F*(*x*)*=dx.* (22)

Якщо *а* = 0 і σ = 1, то нормальний закон називають *нормованим*.

У цьому разі

*f* (*x*)*=* – < *x* <  , (23)

тобто *f*(*x*) *=* ϕ(*x*) є функцією Гаусса,

*F*(*x*) *=* *dx*. (24)

І це є функцією Лапласа.

Для нормованого нормального закону графіки функцій *f*(*x*), *F*(*x*) зображено на рис. 13 і 14.

 

Рис. 13 Рис. 14

Загальний нормальний закон позначають: *N*(*a*; σ)*.* Так, наприк­лад, *N*(–2; 4) — загальний нормальний закон із значенням параметрів *а* = –2, σ = 4.

Нормований нормальний закон позначають *N*(0; 1).

Медіана визначається як ***Me = a***

**3.2. Формули для обчислення ймовірностей   
подій: **

1)

*P*() = . (25)

2)  . (26)

Для *N*(0, 1) формули (25), (26) наберуть такого вигляду:



Правило трьох сигм   
для нормального закону

Коли , то згідно з (26) маємо:

.

Практично ця подія при одному експерименті здійсниться, а тому її вважають практично вірогідною. Звідси:



Тобто ймовірність того, що внаслідок проведення експерименту випадкова величина *Х*, яка має закон розподілу *N*(*a*; σ), не потрапить у проміжок , дорівнює 0,0027. Це становить 0,27%, тобто практично вважається, що ця подія внаслідок прове­дення одного експерименту не здійсниться.

**Приклад 8.** Відомо, що випадкова величина *Х* має закон розподілу *N*(– 4; 2).

Записати вирази для *f*(*x*), *F*(*x*) і накреслити їх графіки. Обчис­лити *Р*(– 6 < *x* < 3), *P*(< 4). Чому дорівнюють Мo, Ме?

## Розв’язання.



Графіки *f*(*x*), *F*(*x*) наведені на рис. 15 і 16.

 

Рис. 15 Рис. 16

Використовуючи формули (25), (26), обчислюємо ймовірності:

1) 



2) **

**

Mo *=* Me *= a = –* 4;

**3.3. Експоненціальний закон розподілу**

Експоненціальним законом випадкової величини називають гамма-розподіл, в якому  = 1.

Для цього закону розподілу

 (27)

 (28)

Графіки *f*(*x*), *F*(*x*) зображені на рис. 17 і 18.

 

Рис. 17 Рис. 18

#### Числові характеристикиекспоненціального закону розподілу

Оскільки  = 1, маємо такі співвідношення.

1.  (29)

2. . (30)

3. . (31)

4. Me для експоненціального закону визначається так:

 (32)

Серед усіх законів неперервних випадкових величин лише експо­ненціальному притаманна властивість — відсутність післядії, а саме: якщо пов’язати випадкову величину із часом, то для цього закону минуле не впливає на передбачення подій у майбутньому. Цю властивість експоненціального закону використовують у марківських випадкових процесах, теорії масового обслуговування, теорії надійності.

**Приклад 9.** Задано



Визначити *М* (*Х*), σ (*Х*), Ме.

***Розв’язання.*** Використовуючи формули (29—32), одержимо:

 оскільки ;



**3.4. Рівномірний закон розподілу**

Неперервна випадкова величина *Х*, що визначена на проміжку [*a*, *b*], має рівномірний закон розподілу, якщо



Функція розподілу ймовірностей



Числові характеристики

1. 



1. 

де 

Тоді



3. ;

4. ;

5. 